Teoria miary
WPPT/SPPI IIr. semestr zimowy 2006/7
WYKŁAD 14: Absolutna ciągłość, singularność,
Twierdzenie Radona-Nikodyma

8/01/07

Dana jest przestrzeń mierzalna (X, Σ) i na niej dwie miary μ i ν.

Definicja 1. Miara ν jest *absolutnie ciągła* względem miary μ (piszemy $\nu \ll \mu$), jeśli $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$ dla każdego $A \in \Sigma$.

Definicja 2. Miara ν jest *singularna* względem miary μ (piszemy $\nu \perp \mu$), jeśli istnieje zbiór $A \in \Sigma$ taki, że $\mu(A) = \nu(A^c) = 0$.

Uwaga. Zbiór A można zastąpić dowolnym jego nadzbiorem miary μ zero. Zatosowanie: Jeśli $\nu \perp \mu$ i $\xi \perp \mu$ to $\nu + \xi \perp \mu$ (trzeba wziąć sumę odpowiednich zbiorów).

Na ćwiczenia: 1) Sprawdź, że $\nu + \xi$ jest miarą. 2) Jeśli $\nu \geq \xi$ i $\xi < \infty$, to $\nu - \xi$ też jest miarą. Jesli obie są singularne względem μ, to różnica też. 3) Suma (i różnica, jesli ma sens) miar absolutnie ciągłych jest absolutnie ciągła (względem μ). 4) Miara ν jednocześnie singularna i absolutnie ciągła względem jakiejś miary μ jest zerowa.

Twierdzenie (o rozkładzie)**.** *Dla dowolnej miary μ i dowlnej* **skończonej** *ν istnieje rozkład miary ν na sumę $\nu = \nu' + \nu''$ na miarę ν' singularną wzlgędem miary μ i ν'' absolutnie ciągłą względem μ. Rozkład ten jest jednoznaczny.*

Dowód. Niech $\beta = \sup\{\nu(D) : \mu(D) = 0\}$. Istnieje zbiór D_0 realizujący to supremum: bo istnieje ciąg zbiorów D_n realizujący to supremum w granicy i przyjmując $D_0 = \bigcup D_n$ mamy $\mu(D_0) = 0$ oraz $\nu(D_0) \geq \nu(D_n)$ dla każdego n, stąd $\nu(D_0) \geq \beta$. Oczywiście $\nu(D_0) \leq \beta$ czyli jest równość. W takim razie zdefiniujmy

$$\nu'(A) = \nu(A \cap D_0),$$
$$\nu''(A) = \nu(A \cap D_0^c).$$

Oczywiście są to miary (absolunie ciągłe względem ν) i $\nu = \nu' + \nu''$.
Teraz tak: ν' jest singularna względem μ: $\mu(D_0) = 0$ i $\nu'(D_0^c) = \nu(D_0^c \cap D_0) = 0$, natomiast ν'' jest absolutnie ciągła: jeśli $\mu(A) = 0$ to również $\mu(A \cup D_0) = 0$, stąd $\nu(A \cup D_0) \leq \beta = \nu(D_0)$. Czyli $\nu(A \setminus D_0) = 0$, a to jest z definicji $\nu''(A)$.

Jednoznaczność: Jeśli ξ', ξ'' jest innym takim rozkładem to

$$\xi''(A) = \xi''(A \cap D_0) + \xi''(A \cap D_0^c) = 0 (\text{bo } \xi'' \ll \mu) + \xi''(A \cap D_0^c) \leq \nu(A \cap D_0^c) = \nu''(A).$$

Zatem $\xi = \nu'' - \xi''$ jest miarą. Miara ta jest absolutnie ciągła względem μ. Ponadto $\xi = -\nu' + \xi'$. Jako różnica miar singularnych jest singularna. Miara jednocześnie singularna i absolutnie ciągła (względem μ) jest zerowa, zatem $\nu'' = \xi''$ a co za tym idzie, $\nu' = \xi'$. $\square$

Twierdzenie Radona-Nikodyma. *Niech μ będzie miarą skończoną, a ν dowolną inną miarą taką, że $\nu \ll \mu$. Wtedy istnieje funkcja mierzalna $f \geq 0$ taka, że $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$ dla każdego $A \in \Sigma$.*

Innymi słowy wtedy ν jest miarą μ_f z gęstością f. Funkcję f nazywamy *gęstością* albo *pochodną* Radona–Nikodyma ν względem μ. Oznaczamy się ją też symbolem $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Dowód. Określmy $F_1(A) = \inf\{\frac{\nu(B)}{\mu(B)} : B \subset A, 0 < \mu(B) < \infty\}$, $F_2(A) = \sup\{\frac{\nu(B)}{\mu(B)} : B \subset A, 0 < \mu(B) < \infty\}$, $F = F_2 - F_1$ (wszystko dla A spełniających $\mu(A) > 0$, tu przyjmujemy $\infty - \infty = 0$).

Udowodnimy najpierw fakt taki:

Fakt. Dla $\epsilon > 0$ każdy A o mierze μ dodatniej zawiera B taki, że $F(B) < \epsilon$.

Dowodzimy przez zaprzeczenie. Niech A dodatniej miary μ nie spełnia tego warunku. W szczególności musi zachodzić $\theta = F_1(A) < \infty$. Istnieje B_0 miary μ dodatniej taki, że $\frac{\nu(B_0)}{\nu(B_0)} < \theta + \frac{\epsilon}{2}$.

Z założenia istnieje $B_1 \subset B_0$ miary μ dodatniej taki, że $\frac{\nu(B_1)}{\mu(B_1)} \geq F_1(B_0) + \epsilon \geq \theta + \epsilon$. Dalej stosujemy indukcję pozaskończoną: skonstruujemy rozłączny ciąg pozaskończony $B_\alpha \subset B_0$ zbiorów miary μ dodatniej taki, że $\frac{\nu(B_\alpha)}{\mu(B_\alpha)} \geq \theta + \epsilon$.

Jeśli dla liczby porządkowej α skonstruowaliśmy zbiory B_β dla wszystkich $\beta < \alpha$, (na przykład skonstruowaliśmy już B_1) to teraz bierzemy $C = B_0 \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$. Albo $\mu(C) = 0$, wtedy kończymy konstrukcję ciągu, albo $\mu(C) > 0$ i wtedy w C jest podzbiór B_α taki, że $\frac{\nu(B_\alpha)}{\mu(B_\alpha)} \geq F_1(C) + \epsilon \geq \theta + \epsilon$. Oczywiście B_α jest rozłączny w wszystkimi B_β. Ponieważ zbiory B_α są rozłączne i miary μ dodatniej, nie może ich być nieprzelczalnie wiele. Zatem indukcja musi zatrzymać się na jakimś kroku przeliczalnym. Czyli zmieniając numerację możemy napisać $B_0 = \bigcup B_n$ z dokładnością do miary μ i suma jest rozłączna. Czyli $\mu(B_0) = \sum_n \mu(B_n)$. Ale teraz:

$$\mu(B_0)(\theta + \tfrac{\epsilon}{2}) \geq \nu(B_0) \geq \sum_n \nu(B_n) \geq \sum_n \mu(B_n)(\theta + \epsilon) = \mu(B_0)(\theta + \epsilon).$$

Ta sprzeczność kończy dowód Faktu.

Skonstruujemy teraz (znów indukcją pozaskończoną) ciąg zbiorów rozłącznych G_n takich, że $\bigcup G_n = X$ z dokładnością do miary μ i $F(G) < \epsilon$. Robimy to tak jak poprzednio: G_1 dowolny podziór X spełniający $F(G_1) < \epsilon$ (korzystamy z Faktu). Mając G_β dla wszystkich $\beta < \alpha$ kładziemy $C = X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$. Albo $\mu(C) = 0$, wtedy kończymy konstrukcję ciągu, albo $\mu(C) > 0$ i wtedy w C jest podzbiór G_α taki, że $F(G_\alpha) < \epsilon$. Podobnie jak poprzednio, ciąg zatrzyma się na przeliczalnym indeksie. Po przenumerowaniu jest to ciąg G_n. Teraz definiujemy (określoną μ-prawie wszędzie) funkcję

$$f_\epsilon(x) = \frac{\nu(G_n)}{\mu(G_n)}, \quad \text{gdzie} \quad x \in G_n.$$

Weźmy $A \subset G_n$. Wtedy

$$\int_A f_\epsilon d\mu = \mu(A)\tfrac{\nu(G_n)}{\mu(G_n)} \in \left[\mu(A)(\tfrac{\nu(A)}{\mu(A)} - \epsilon), \mu(A)(\tfrac{\nu(A)}{\mu(A)} + \epsilon)\right],$$

czyli

$$\int_A f_\epsilon d\mu \approx \nu(A)$$

z dokładnością do $\epsilon' = \mu(A)\epsilon$. To samo jest prawdą dla dowolnego $A \in \Sigma$: trzeba rozbić A na sumę $A \cap G_n$.

Weźmy $\epsilon_i \to 0$. Oszacujemy $|f_{\epsilon_i}(x) - f_{\epsilon_j}(x)|$. Niech $x \in G_n$ skonstruowanego dla ϵ_n i $x \in G_m$ skonstruowanego dla ϵ_m. Dla μ-prawie wszystkich x będzie tak, że $A = G_n \cap G_m$ ma dodatnią miarę μ. Z powyższych nierówności $f_{\epsilon_i}(x) \approx \frac{\nu(A)}{\mu(A)}$ z dokładnością do ϵ_i i $f_{\epsilon_j}(x) \approx \frac{\nu(A)}{\mu(A)}$ z dokładnością do ϵ_j. Zatem $|f_{\epsilon_i}(x) - f_{\epsilon_j}(x)| \leq \epsilon_i + \epsilon_j$. Oznacza to, że funkcje f_{ϵ_i} zbiegają jednostajnie prawie wszędzie do funkcji mierzalnej f i $|f(x) - f_{\epsilon_i}(x)| \leq \epsilon_i$. Dla każdego zbioru A mamy zatem nierówność $|\int_A f\, d\mu - \int f_{\epsilon_i}\, d\mu| \leq \mu(A)\epsilon_i$, stąd $|\int_A f\, d\mu - \nu(A)| \leq 2\mu(A)\epsilon_i$. Ponieważ ϵ_i jest dowolnie mały, $\int_A f\, d\mu = \nu(A)$. $\square$